1 Wektory, pochodne, układy współrzędnych

1.1 alfabet$^{(1\ punkt)}$

Proszę się nauczyć jak się pisze i nazywa litery greckie, małe i wielkie, a przynajmniej α, β, γ, δ, ϵ, ζ, η, θ, λ, μ, ν, ξ, π, ρ, σ, τ, ϕ, φ, χ, ψ, ω, Γ, Δ, Θ, Λ, Ξ, Π, Σ, Φ, Ψ, Ω.

1.2 wektory$^{(a+b+c+d=1,\ e+f+g=2,\ h=1,\ i=0,\ j=1,\ k+l=1)}$

Dane są trzy wektory $\vec{a} = (0, 2, -1)$, $\vec{b} = (2, -1, 1)$, $\vec{c} = (1, 3, 0)$. Oblicz:

a) iloczyn skalarny $\vec{a} \cdot \vec{b}$,

b) długość wektora $c = |\vec{c}| = \sqrt{\vec{c}^2} = \sqrt{\vec{c} \cdot \vec{c}}$,

c) kąt zawarty pomiędzy wektorami $\vec{b}$ i $\vec{c}$,

d) $\vec{a} + \vec{b} - \vec{c}$,

e) $(\vec{a} \cdot \vec{c})\vec{b} - (\vec{a} \cdot \vec{b})\vec{c}$,

f) iloczyn wektorowy $\vec{a} \times \vec{b}$,

g) iloczyn mieszany $(\vec{b} \times \vec{c}) \cdot \vec{a}$, oraz $(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c}$

h) rzut wektora $\vec{b}$ na kierunek wektora $\vec{c}$,

i) $\vec{a} \cdot (\vec{b} \times \vec{a})$,

j) wektor jednostkowy normalny (tzn. prostopadły) do płaszczyzny w której leżą wektory $\vec{a}$ i $\vec{b}$.

k) Jak sprawdzić czy dwa wektory są prostopadłe? Podaj przykład wektora prostopadłego do $\vec{b}$.

l) Podaj przykład wektora równoległego do $\vec{b}$. Jak sprawdzić czy dwa wektory są równoległe?

W każdym przypadku podaj czy wynik jest skalarem (tzn. liczbą), wektorem, czy czymś innym.

1.3 wersory kartezjańskie i iloczyny wektorów$^{(a+b=3)}$

Przez $\hat{x}$ oznaczany jest wersor (wektor jednostkowy) w kartezjańskim układzie współrzędnych w kierunku osi x. Analogiczna jest definicja $\hat{y}$ oraz $\hat{z}$. Każdy wektor $\vec{a}$ można zapisać poprzez jego składowe i wersory jako $\vec{a} = a_x\hat{x} + a_y\hat{y} + a_z\hat{z}$.

a) Wersory są znormalizowane, tzn.

$$\hat{x} \cdot \hat{x} = \hat{y} \cdot \hat{y} = \hat{z} \cdot \hat{z} = 1,$$

oraz ortogonalne, tzn.

$$\hat{x} \cdot \hat{y} = \hat{y} \cdot \hat{z} = \hat{z} \cdot \hat{x} = 0.$$

Korzystając z tego uzasadnij sposób obliczania iloczynu skalarnego w poprzednim zadaniu.

b) Policz $\hat{x} \times \hat{y}$. Narysuj kartezjański układ współrzędnych (x, y, z) i sprawdź czy zwrot otrzymanego wersora $\hat{z}$ jest zgodny z regułą śruby prawoskrętnej dla mnożenia wektorowego. Policz iloczyny wektorowe dla par wersorów

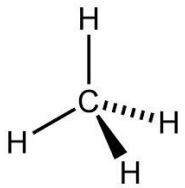
$$\hat{y} \times \hat{x}, \quad \hat{z} \times \hat{x}, \quad \hat{z} \times \hat{z}.$$

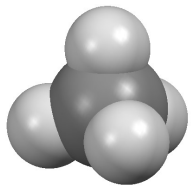
Uwaga:

W podręcznikach używane są różne notacje wektorów i wersorów:
$\boldsymbol{a} = a_x\hat{\boldsymbol{x}} + a_y\hat{\boldsymbol{y}} + a_z\hat{\boldsymbol{z}}$ (Kittel, *Mechanika*, Taylor, *Mechanika klasyczna*),
$\vec{a} = a_x\hat{\mathbf{i}} + a_y\hat{\mathbf{j}} + a_z\hat{\mathbf{k}}$ (Resnick&Halliday, Kleppner&Kolenkow, Young&Freedman),
$\boldsymbol{a} = a_x\boldsymbol{i} + a_y\boldsymbol{j} + a_z\boldsymbol{k}$ (Feynman, *Lectures on Physics*),
$\vec{a} = a_x\vec{i_x} + a_y\vec{i_y} + a_z\vec{i_z}$ (wykład A.M.)

1.4 kąty w tetraedrze$^{(3)}$

Molekuła metanu CH_4 ma symetrię tetraedryczną, jak na rysunku. Jaki jest kąt H–C–H?
Proszę o rozwiązanie przy użyciu geometrii analitycznej (układów współrzędnych, wektorów). Wskazówka: Taką molekułę można wpisać w sześcian tak, że atomy wodoru są w czterech spośród ośmiu wierzchołków sześcianu, a atom węgla w środku. Można przyjąć układ współrzędnych tak, żeby węgiel był w punkcie $(0, 0, 0)$, a wodory były w punktach $(\pm1, \pm1, \pm1)$ i policzyć odpowiedni iloczyn skalarny.





1.5 pochodne funkcji$^{(a=3,\, b=2)}$

Notacja: c – stała, $f = f(x)$, $g = g(x)$ – funkcje zmiennej x. Poprzez znak $'$ oznacza się pochodną, gdy są funkcje jednej zmiennej i jest oczywiste po której zmiennej liczy się pochodną.

$$f' \equiv \frac{d}{dx}f(x) \equiv \frac{df}{dx}(x) \equiv \frac{df}{dx} \equiv \partial_x f$$

Podstawowe reguły różniczkowania:

$$\frac{d}{dx}(c \cdot f) = c \cdot \frac{d}{dx}f \qquad \text{mnożenie przez stałą,}$$

$$\frac{d}{dx}(f + g) = \frac{d}{dx}f + \frac{d}{dx}g \qquad \text{pochodna sumy,}$$

$$\frac{d}{dx}f(g(x)) = \frac{df}{dg}(g(x)) \cdot \frac{dg}{dx}(x) \qquad \text{pochodna funkcji złożonej,}$$

$$\frac{d}{dx}(f \cdot g) = \frac{d}{dx}f \cdot g + f\frac{d}{dx}g \qquad \text{pochodna iloczynu,}$$

$$\left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f'g - fg'}{g^2} \qquad \text{pochodna ilorazu,}$$

$$\frac{df}{dx} = \left(\frac{dx}{df}\right)^{-1} \qquad \text{pochodna funkcji odwrotnej } f = f(x),\ x = x(f),$$

oraz kilku wzorów na pochodne elementarnych funkcji

$$\frac{d}{dx}(x^a) = ax^{a-1}$$

$$\frac{d}{dx}\sin x = \cos x, \qquad \frac{d}{dx}\cos x = -\sin x$$

$$\frac{d}{dx}\ln x = \frac{1}{x}, \qquad \frac{d}{dx}e^x = e^x$$

a) wylicz pochodne następujących funkcji po zmiennej x

$$\sqrt{x}, \qquad \tan x, \qquad (1+2x^2)^3, \qquad \frac{1}{x}, \qquad xe^{iax},$$

$$r = \sqrt{x^2+y^2+z^2}, \qquad \frac{1}{r}, \qquad A\sin(\vec{k}\vec{r}) = A\sin(k_x x + k_y y + k_z z).$$

gdzie A, $\vec{k}$, a nie zależą od x.

Dla osób które czują potrzebę poćwiczenia liczenia pochodnych (tego nie będziemy robili podczas ćwiczeń): Policz drugie pochodne powyższych funkcji, jako pochodną pierwszej pochodnej

$$\frac{d^2 f}{dx^2} \equiv \frac{d}{dx}\left(\frac{d}{dx}f\right).$$

b) Dla wszystkich: Pochodne po czasie t czasem oznacza się kropkami np. dla $y = y(t)$,

$$\dot{y} \equiv \frac{d}{dt}y, \qquad \ddot{y} \equiv \frac{d^2 y}{dt^2}.$$

Policz pierwsze i drugie pochodne po zmiennej t dla następujących funkcji

$$y = x^2, \quad x = const,$$

$$y = x^2, \quad x = x(t),$$

$$s = at^2/2 + v_0 t + x_0,$$

$$\vec{r} = (x(t), y(t), z(t)),$$

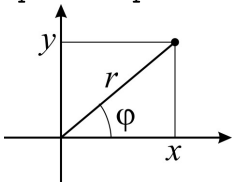
$$z = A\sin(\omega t),$$

$$u = \exp(i\vec{k}\vec{r} - i\omega t).$$

gdzie $\vec{k}$, A, ω, $\vec{r}$, v_0, x_0, a nie zależą od t.

1.6 Układ współrzędnych biegunowych(1)

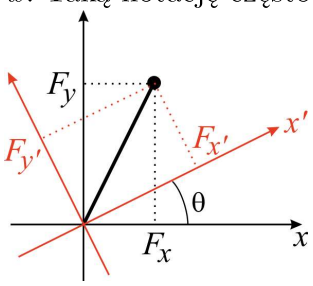
Niektóre problemy wygodnie opisuje się w biegunowym układzie współrzędnych, w którym położenie punktu opisuje się podając parę liczb (r, φ), jak na rysunku poniżej. Znajdź związki pomiędzy współrzędnymi w układzie kartezjańskim (x, y), a współrzędnymi w układzie biegunowym (r, φ). Np. `pl.wikipedia.org/wiki/Układ_współrzędnych_biegunowych`



1.7 obrót układu współrzędnych(3)

Wektor $\vec{F}$ ma współrzędne (F_x, F_y). Jeżeli obrócimy osie układu współrzędnych, to współrzędne tego samego wektora $\vec{F}$ będą inne. Jakie będą współrzędne wektora $\vec{F}$ w układzie (x', y') obróconym o kąt θ, jak na rysunku? Żeby to policzyć można zapisać współrzędne wektora $\vec{F}$ poprzez współrzędne biegunowe r i φ, i przy takich współrzędnych zapisanie obrotu o kąt θ jest proste.

Komentarz: prim przy x nie ma tutaj nic wspólnego z pochodną. x' to po prostu inna zmienna niż x. Taką notację często stosuje się w algebrze.



1.8 iloczyn skalarny jako niezmiennik przy obrotach(2)

Iloczyn skalarny dwu wektorów $\vec{a}$ i $\vec{b}$ na płaszczyźnie liczony jest jako

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = a_x b_x + a_y b_y.$$

Jeżeli obrócimy układ odniesienia tak jak w poprzednim zadaniu, to współrzędne wektorów będą inne i iloczyn skalarny powinien być liczony jako

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = a_{x'} b_{x'} + a_{y'} b_{y'}$$

Czy zmieni to wartość iloczynu skalarnego?

1.9 dla znudzonych powtórką z matematyki(3)

Policz molekuły w ziemskiej atmosferze.

1.10 analiza wymiarowa(2)

Wstęp. Rozwiązując zadania z mechaniki sprawdzaj wymiar (jednostki) w równaniach i końcowej odpowiedzi. Można to robić używając jednostek (kg, m, s), ale często łatwiej jest używać w równaniach M, L, T jako jednostki masy, długości, czasu. Wtedy przyspieszenie ma jednostkę L/T^2, siła ma jednostkę $F = M\,L/T^2$, a ciśnienie $F/L^2 = M\,L^{-1}T^{-2}$.

Na przykład, otrzymując okres drgań $2\pi\sqrt{g/l}$ dostajemy jednostkę $\sqrt{L/T^2/L} = 1/T$ i widzimy, że coś jest źle. W wyrażeniu $(mg + m)$ coś jest źle, bo nie możemy dodawać wielkości o różnych jednostkach.

Wielkości pod funkcjami powinny być bezwymiarowe. Np. w wyrażeniu $\sin(\omega t - kx)$ jeżeli t ma wymiar T, to ω musi mieć wymiar $1/T$. Jeżeli x ma wymiar L, to k musi mieć wymiar $1/L$.

Zadanie. Na cząstkę poruszającą się wzdłuż osi x działa wypadkowa siła $F = F_0 \exp(-kx)$, gdzie F_0 oraz k są stałymi. Ruch zaczyna się w punkcie $x = 0$ od zerowej prędkości. Cząstka osiągnie maksymalną energię kinetyczną równą:
A. F_0/k,
B. $F_0/\exp(k)$,
C. kF_0,
D. $(kF_0)^2/2$,
E. $k\exp(k)F_0$.

1.11 analiza wymiarowa 2$^{(2)}$

Okres obiegu satelity Ziemi na niskiej orbicie zależeć może tylko od g i promienia Ziemi R. W jaki sposób?

1.12 analiza wymiarowa 3$^{(2)}$

Prędkość dźwięku v w płynie zależy tylko od gęstości płynu ρ i współczynnika sprężystości objętościowej K, który ma wymiar ciśnienia (siły na powierzchnię). Pokaż, że v jest proporcjonalne do

$$v \propto \sqrt{K/\rho}.$$

1.13 przypadki graniczne*$^{(4)}$

Janusz rzuca piłkę (pod wybranym kątem, tak żeby osiągnąć maksymalną odległość) z prędkością v z brzegu klifu o wysokości h. Które z poniższych wyrażeń to poprawna maksymalna odległość w poziomie? Jedna odpowiedź jest poprawna. Nie rozwiązuj pełnego problemu, tylko sprawdź sensowność wyniku dla wybranych przypadków granicznych: $v = 0$, lub $h = 0$, lub $v \to 0$, lub $v^2 = 2gh$, oraz to czy wynik powinien zależeć od niektórych wielkości.

$$\frac{gh^2}{v^2}, \qquad \frac{v^2}{g}, \qquad \sqrt{\frac{v^2 h}{g}}, \qquad \frac{v^2}{g}\sqrt{1+\frac{2gh}{v^2}}, \qquad \frac{v^2}{g}\left(1+\frac{2gh}{v^2}\right), \qquad \frac{v^2/g}{1-2gh/v^2}$$

Suma: 38 punktów. Tyle jest do podziału na całą grupę za prezentację rozwiązań na zajęciach.

2 Kinematyka

2.1 ruch w jednym wymiarze$^{(a+b+c=1)}$

Położenie cząstki w funkcji czasu t dane jest funkcją $x = A\sin(2\pi t/\tau)$, gdzie $\tau = 3$ s, $A = 0.2$ m. Wylicz:

a) prędkość dla $t = 2$ s,
b) przyspieszenie dla $t = 0$ s,
c) średnią prędkość pomiędzy $t_0 = 0$ s i $t_1 = 2$ s.

2.2 ruch w 3 wymiarach$^{(a+b+c+d=3)}$

Cząstka porusza się w trzech wymiarach. Jej pozycja $\vec{r}$ dana jest równaniem

$$\vec{r} = (1 - 2t)\hat{x} + 4t\hat{y} - (1 + 3t - 2t^2)\hat{z}$$

a) Jaki jest wektor prędkości $\vec{v} = \dot{\vec{r}}$ w chwili $t = 0$?
b) Jaka jest prędkość $v = |\vec{v}|$ dla $t = 0$, a jaka dla $t = 1$?
c) Jaka jest średnia prędkość od $t = 0$ do $t = 1$?
d) Jakie jest przyspieszenie dla $t = 1$?

Strategia rozwiązywania problemów z mechaniki

1. Zrób czytelny diagram (schematyczny rysunek) sytuacji. Oznacz istotne wielkości (siły, długości, masy). W niektórych zadaniach diagramy bardzo pomagają znaleźć rozwiązanie. Dla problemów gdzie są siły, dodatkowo narysuj 'free-body diagram' tzn. każdy element osobno z działającymi nań siłami. Dla problemów w których jest sytuacja początkowa i końcowa: narysuj osobno te dwie sytuacje. Dla problemów gdzie jest jakiś ruch, sprecyzuj jaki używasz układ współrzędnych.

2. Zapisz co znasz, a co próbujesz znaleźć. Zapisz równania wiążące występujące w problemie wielkości. Np. jeżeli nieznane są 3 zmienne, a mamy tylko 2 równania, to zwykle potrzebne jest jeszcze jakieś niezależne równanie.

3. Rozwiązuj na symbolach, a nie na wartościach liczbowych. To szybsze, mniej podatne na błędy, pozwala znaleźć ogólne rozwiązanie i zależności, można sprawdzić rozwiązanie poprzez szczególne przypadki, można sprawdzić poprzez analizę wymiarów.

4. Sprawdzaj wymiar i zachowanie rozwiązań w szczególnych przypadkach, bo zwykle są prostsze. Np. taki szczególny przypadek w zadaniu 4.2a), to dodatkowe założenie, że $m = M$, a w zadaniu 2.3 to dodatkowe założenie, że $s = D = 0$.

5. Jeżeli masz liczbową odpowiedź, to sprawdź czy jest sensowny rząd wielkości.

2.3 ostatnia droga komara$^{(a+b+c+d=4)}$

Komar jest na linii pomiędzy zbliżającymi się dłońmi. Początkowo odległość między dłońmi wynosi D, a komar jest w odległości s od lewej dłoni. Lewa dłoń porusza się w prawo z szybkością v_L. Prawa dłoń porusza się w lewo z szybkością v_P. Komar leci w kierunku lewej dłoni z szybkością v_K, unika zderzenia zawracając tuż przed nią i leci w kierunku prawej dłoni uderzając w nią i ginąc tragicznie.

a) Narysuj diagram początkowej sytuacji.

b) Przedstaw na wykresie położenia wszystkich obiektów w funkcji czasu.

c) Zapisz równania opisujące położenia dłoni i komara w funkcji czasu.

d) Ile czasu minęło od początku do chwili śmierci komara?

2.4 o całkowaniu (wyprzedzamy kurs analizy mat.)$^{(a=1,\ b=1,\ c=1)}$

Całka nieoznaczona (funkcja pierwotna) z funkcji $f(x)$ po zmiennej x to taka funkcja $F(x)$ dla której

$$\frac{dF}{dx} = f(x).$$

Proces szukania funkcji $F(x)$ dla danej funkcji f nazywa się całkowaniem i zapisuje

$$F(x) = \int f(x)\,dx = ...$$

Np.

$$\int \cos(x)\,dx = \sin(x) + C, \qquad \text{bo} \qquad \frac{d}{dx}\left[\sin(x) + C\right] = \cos(x)$$

Funkcja F jest określona z dokładnością do stałej (czegoś niezależnego od x). Całki niektórych funkcji nie dają się zapisać za pomocą typowych funkcji matematycznych. Są tablice całek: `https://en.wikipedia.org/wiki/Lists_of_integrals`

Całka oznaczona z funkcji $f(x)$ po zmiennej x w granicy od a do b to

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a)$$

W pośrednich etapach obliczeń niektórzy stosują notację

$$\int_a^b f(x)\,dx = [F(x)]_a^b = F(b) - F(a)$$

Np.

$$\int_0^{\pi/2} \cos(x)\,dx = [\sin(x)]_0^{\pi/2} = \sin(\pi/2) - \sin(0) = 1 - 0 = 1$$

To jest liczba niezależna od x (zmiennej podcałkowej). Można się spotkać z zapisem w którym całka oznaczona pozostaje funkcją x

$$E(x) = F(x) - F(a) = \int_a^x f(x)\,dx \qquad \leftarrow \text{mylący zapis}$$

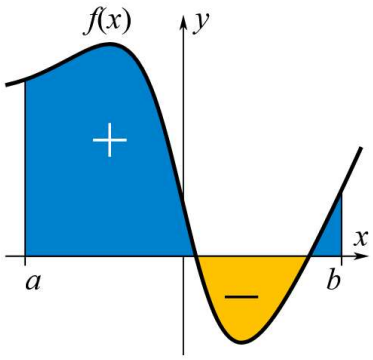
ale jest to wynik konfliktu oznaczeń i powinno to być zapisane przy pomocy innej zmiennej podcałkowej, np.

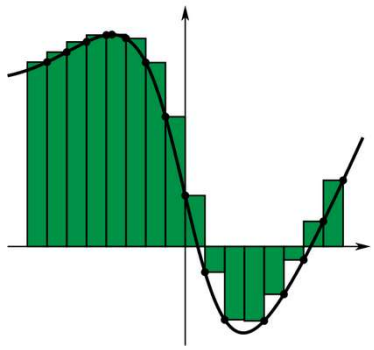
$$E(x) = F(x) - F(a) = \int_a^x f(w)\,dw$$

Interpretacja geometryczna całki oznaczonej:

$$\int_a^b f(x)\,dx$$

jest równe *polu powierzchni* pod funkcją $f(x)$ w przedziale $[a, b]$, uwzględniając przedziały dla których $f(x) < 0$ ze znakiem minus – tak jak na rysunku poniżej po lewej.





Jest to związane z równoważną definicją całki oznaczonej, jako sumy pól prostokątów (jak na prawym rysunku) przy granicznym przejściu z szerokością każdego prostokąta do zera (konstrukcja Riemanna). Rysunki z wiki.

Do zrobienia:

a) Znajdź całki nieoznaczone: $\int b\,dx$, gdzie b jest stałą, $\int t\,dt$, $\int \omega \sin \omega t\,dt$.

b) Wylicz całkę oznaczoną

$$\int_0^1 x\,dx$$

c) Znajdź pole pod funkcją $f(x) = \sin x$ w przedziale $[0, \pi]$.

2.5 całkowanie równań ruchu$^{(a+b+c=4)}$

Ciało o masie m, z początkowego poziomu y_0 nad powierzchnią Ziemi, zostało wyrzucone pionowo do góry z prędkością początkową równą v_0. Działa siła grawitacji równa $-mg$.

a) z równania Newtona zapisz przyspieszenie $a(t)$
b) całkując $a(t)$ po czasie wylicz prędkość $v(t)$. Zastosuj warunki początkowe na v_0.
c) całkując $v(t)$ po czasie wylicz położenie $y(t)$. Zastosuj warunki początkowe na y_0.

2.6 przyspieszenie księżycowe$^{(2)}$

Obejrzyj film *Hammer and feather drop on moon* `www.youtube.com/watch?v=KDp1tiUsZw8` Oszacuj na tej podstawie przyspieszenie na powierzchni Księżyca.

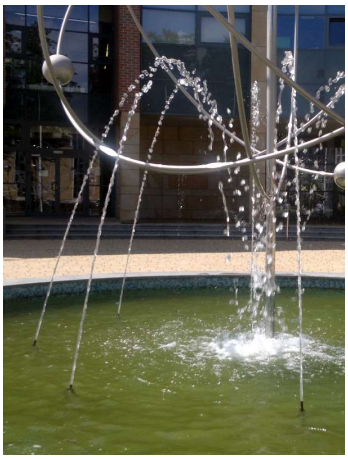
2.7 rzut ukośny$^{(a+b+c=2,d+e+f=3)}$

Ciało rzucono z prędkością v_0 pod kątem α do poziomu. Znajdź:

a) prędkość $\vec{v}$ w funkcji czasu,
b) zależność położenia od czasu $x(t)$ oraz $y(t)$,
c) równanie toru ruchu – zależność $y(x)$,
d) czas trwania ruchu,
e) zasięg rzutu,
f) maksymalną wysokość na jaką wzniesie się ciało.

Pod jakim kątem należy rzucić ciało, aby zasięg rzutu był maksymalny? Opory powietrza należy zaniedbać. Przyspieszenie ziemskie wynosi g.

2.8 fontanna$^{(3)}$



W fontannie przed budynkiem WFAIS UJ strugi wody zaczynają się i kończą na tym samym poziomie. Lecące strugi wody osiągają maksymalną wysokość $h = 2.0$ m i pokonują w poziomie $s = 1.5$ m. Jaka jest prędkość wody w miejscu wylotu?

2.9 układ równań liniowych$^{(3)}$

Cząstka porusza się ze stałym przyspieszeniem. Wiadomo, że cząstka przechodzi przez trzy punkty określone wektorami: $\vec{r}_1$, $\vec{r}_2$ i $\vec{r}_3$ odpowiednio w chwilach czasu t_1, t_2 i t_3. Zapisz układ 3 równań wektorowych łączących podane wyżej wielkości. Wylicz z tych równań wektor przyspieszenia.

2.10 ruch po okręgu$^{(a+b+c=1,\, d+e=2)}$

Ruch cząstki opisują równania

$$x(t) = R\cos\omega t,$$
$$y(t) = R\sin\omega t,$$

gdzie R i ω są stałymi. Znajdź

a) równanie toru ruchu eliminując czas z tych równań,
b) wektor przyspieszenia $\vec{a}$.
c) sprawdź, że

$$\ddot{x} + \omega^2 x = 0,$$
$$\ddot{y} + \omega^2 y = 0.$$

d) Znajdź składową styczną v_t i składową normalną v_n prędkości, w stosunku do toru ruchu,
e) składową styczną a_t i składową normalną a_n przyspieszenia.

2.11 pralka$^{(1)}$

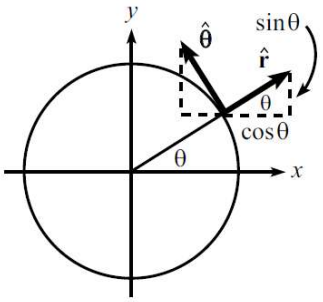
Jakie jest przyspieszenie odśrodkowe w pralce podczas wirowania? Typowe wartości: promień bębna $r = 20$ cm, prędkość wirowania 1000 obr/min. Podaj to jako wielokrotność g. Jakie jest przyspieszenie odśrodkowe na równiku Ziemi.

2.12 ruch opisywany w układzie biegunowym*$^{(a+b+c+d=5)}$

W układzie biegunowym wektor położenia zapisywany jest poprzez podanie (r, θ)

$$\vec{r} = r\,\hat{r} = x\hat{x} + y\hat{y} = r\cos\theta\;\hat{x} + r\sin\theta\;\hat{y}.$$

a) Wersor $\hat{r}$ zmienia się w zależności od punktu $\vec{r}$ i jest wzdłuż tego wektora. Wersor $\hat{\theta}$ jest prostopadły do $\hat{r}$ jak na rysunku.



Zapisz równania wyrażające $\hat{r}$ oraz $\hat{\theta}$ jako kombinację liniową $\hat{x}$ i $\hat{y}$ ze współczynnikami typu $\sin\theta$ oraz $\cos\theta$, podobnie jak w zadaniu 1.7 o obracaniu układu współrzędnych. Można to zrobić ściśle, z definicji wersorów:

$$\hat{r} \stackrel{\text{def}}{=} \frac{\frac{d\vec{r}}{dr}}{\left|\frac{d\vec{r}}{dr}\right|} = \ldots \qquad \hat{\theta} \stackrel{\text{def}}{=} \frac{\frac{d\vec{r}}{d\theta}}{\left|\frac{d\vec{r}}{d\theta}\right|} = \ldots$$

b) Jeżeli $\vec{r} = \vec{r}(t)$ opisuje jakiś ruch i się zmienia w czasie, to od czasu zależą również wersory $\hat{r}$ oraz $\hat{\theta}$. Pokaż, że

$$\dot{\hat{r}} = \dot{\theta}\,\hat{\theta} \qquad \text{oraz} \qquad \dot{\hat{\theta}} = -\dot{\theta}\,\hat{r}.$$

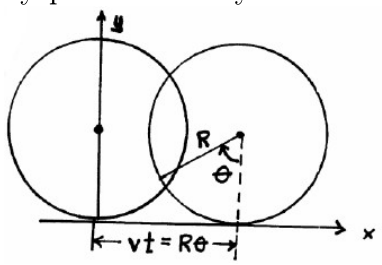
c) Pokaż, że

$$\vec{v} \equiv \dot{\vec{r}} = \dot{r}\,\hat{r} + r\,\dot{\theta}\,\hat{\theta},$$
$$\vec{a} \equiv \ddot{\vec{r}} = (\ddot{r} - r\,\dot{\theta}^2)\hat{r} + (r\,\ddot{\theta} + 2\,\dot{r}\,\dot{\theta})\hat{\theta}.$$

d) Jaką formę przybierają te równania w opisie ruchu z poprzedniego zadania 2.10? Do dyskusji: jakie są zalety i wady używania układu współrzędnych nie-kartezjańskich?

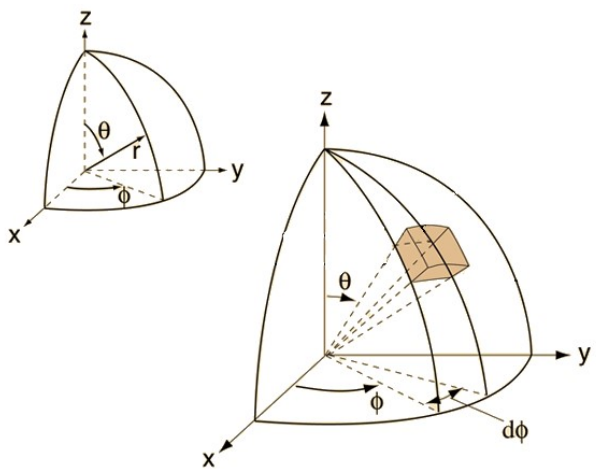
2.13 wektorowe dodawanie położeń, prędkości(3)

Opona o promieniu R toczy się po poziomej drodze bez poślizgu. Jej środek porusza się z prędkością V. Mały kamyk wbity w bieżnik dotyka drogi w momencie $t = 0$. Zapisz położenie, prędkość i przyspieszenie kamyka w zależności od czasu.



2.14 układ współrzędnych sferycznych(2)

Zapisz związki pomiędzy współrzędnymi w układzie kartezjańskim (x, y, z) wektora $\vec{r}$, a współrzędnymi tego wektora w sferycznym układzie współrzędnych (r, θ, ϕ) przedstawionym na rysunku poniżej. Patrz np. `pl.wikipedia.org/wiki/Układ_współrzędnych_sferycznych` Jaka jest objętość dV małego elementu o wymiarach określonych przez (r, θ, ϕ) oraz dr, $d\theta$, $d\phi$, jeżeli przybliżyć go prostopadłościanem?



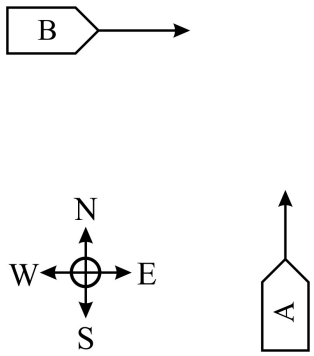
2.15 ile musimy czekać(3)

Po jakim czasie kolejny odcinek *Game of Thrones* nadany z satelity HotBird dociera do Krakowa?

Satelita geostacjonarny HotBird znajduje się cały czas na wysokości $h = 35786$ km nad stałym punktem na równiku Ziemi. Pozycja satelity to 13.00 E. Pozycja Krakowa to 50.06 N, 19.94 E. Promień Ziemi wynosi $R = 6378$ km.

2.16 MPZZM(3)

Mały statek A płynie z prędkością 3 węzły na północ. W pewnym momencie widzi w odległości 1.41 mili morskiej ($\simeq \sqrt{2}$) na północnym zachodzie statek B, płynący ze śpiącym kapitanem z prędkością 4 węzły na wschód. W jakiej najmniejszej odległości statki się miną? Zaniedbaj rozmiary statków, traktując je jako punktowe. Prędkość 1 węzeł to 1 mila morska na godzinę.



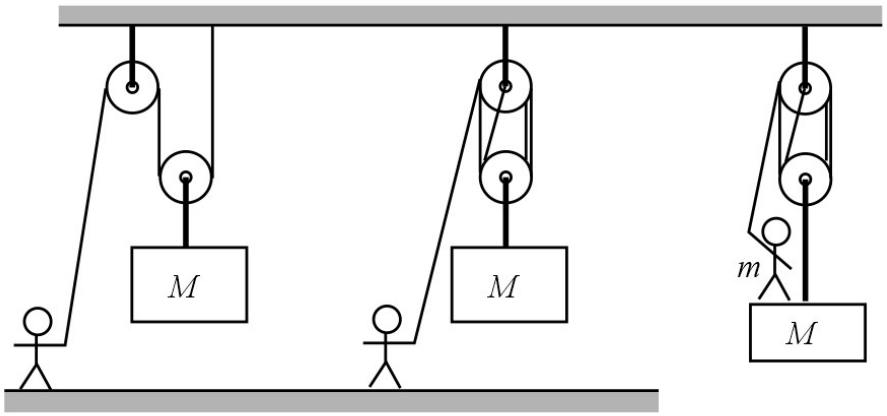
3 Siły i ich równowaga

Uwaga: We wszystkich poniższych zadaniach na masy działa przyspieszenie ziemskie $g = 10$ m/s^2, skierowane na rysunkach w dół.

3.1 wielokrążki (*pulley*)$^{(3)}$

Jaka siłą człowieczek o masie m musi ciągnąć linę na rysunkach poniżej, żeby utrzymać masę M. Siły tarcia zaniedbujemy, czyli naprężenie liny w każdym miejscu jest takie same. Przyjmij, że wszystkie odcinki liny są praktycznie pionowe.

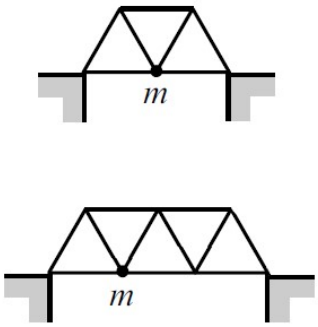
Na drugim i trzecim rysunku lina przechodzi dwa razy przez krążki w górnym bloczku, dwa razy przez krążki w dolnym bloczku, a jej koniec jest umocowany do środka górnego bloczka.



3.2 mosty$^{(a=4,b=6)}$

a) Rozważ pierwszy most na rysunku poniżej, zbudowany z belek tworzących trójkąty równoboczne. Przyjmij, że belki nic nie ważą, mogą przenosić jedynie siły wzdłuż (rozciągające i ściskające), a na połączeniu belek są zawiasy. Samochód o masie m stoi na środku mostu. Znajdź naprężenie każdej belki. Które belki są rozciągane, a które ściskane? Przyjmij że podpory nie wprowadzają żadnych sił poziomych.

b) To samo pytanie ale dla drugiego mostu. Przedstaw wyniki w czytelnej formie.

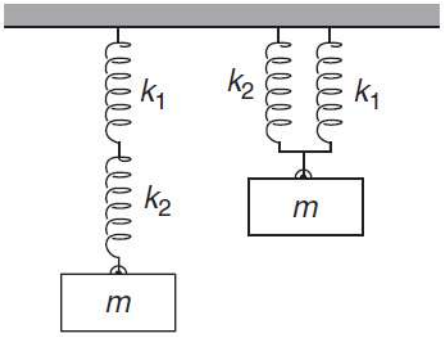


3.3 tarcie$^{(3)}$

Małe ciało o masie m znajduje się na zboczu w kształcie paraboli $y = ax^2$. Współczynnik tarcia statycznego jest równy f. Znajdź maksymalną wysokość y na której to ciało będzie utrzymywało się dzięki sile tarcia.

3.4 łączenie sprężyn$^{(3)}$

Sprężyny o współczynnikach sprężystości k_1 i k_2 i o takich samych długościach połączono jak na rysunkach. Jaki jest wypadkowy współczynnik sprężystości w obu wypadkach?



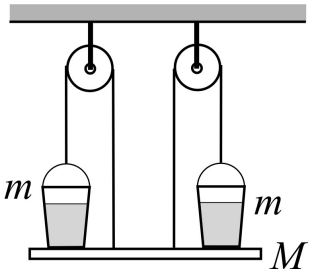
3.5 klocek$^{(5)}$

Klocek o masie m leży na poziomym stole. Współczynnik tarcia między klockiem i podłożem wynosi μ. Jaka minimalna siła F jest potrzebna, żeby przesunąć klocek? Sprawdź czy rozwiązanie daje poprawne granice dla $\mu \to 0$ oraz dla $\mu \to \infty$.
Wskazówki: Rozważ siłę ciągnącą klocek po skosie w górę i skierowaną pod kątem θ do poziomu. Wylicz $F(\theta)$, a potem znajdź wartość minimum tej funkcji ze względu na θ.

$$\cos[\arctan(x)] = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}, \qquad \sin[\arctan(x)] = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}.$$

3.6 wiszący stół$^{(2)}$

Dwa wiadra z wodą stoją na blacie stołu, który wisi zawieszony na dwóch linkach, jak na rysunku poniżej. Czy to jest możliwe? Masa blatu wynosi M, a masa każdego wiadra z wodą m.

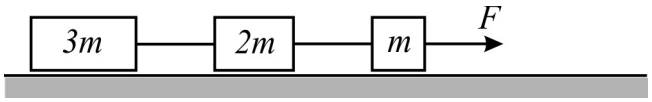


4 Dynamika

Uwaga: We wszystkich poniższych zadaniach 4.1–4.10 na masy działa przyspieszenie ziemskie $g = 10$ m/s^2, skierowane na rysunkach w dół.

4.1 trzy klocki(2)

Trzy klocki leża na gładkim, poziomym stole połączone sznurkiem, jak na rysunku poniżej. Ich masy wynoszą $3m$, $2m$ oraz m. Prawy klocek ciągnięty jest siłą o wartości F i cały pociąg się porusza. Narysuj jakie siły działają na każdy klocek osobno i podaj ich wartości.



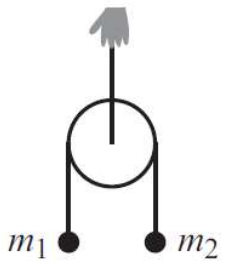
Jak się zmieni rozwiązanie gdy między klockami a stołem będzie współczynnik tarcia f?

4.2 bloczek(4)

Trzymasz nieruchomo bloczek jak na rysunku poniżej. Bloczek i lina są nieważkie, bloczek kręci się bez oporów, masy mogą się poruszać.

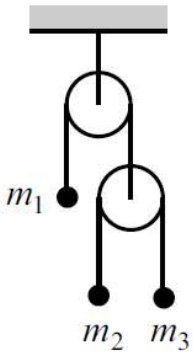
a) Jakiej siły używasz?

b) Jaki musi być stosunek mas, żeby poruszały się z przyspieszeniem $g/2$?



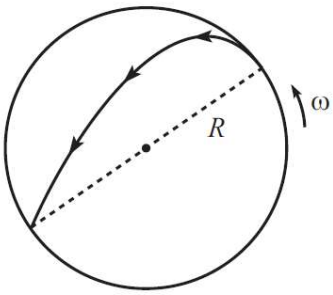
4.3 bloczki(5)

Trzy masy połączone są jak na rysunku poniżej. Bloczki i lina są nieważkie, bloczki kręcą się bez oporów. Jakie jest przyspieszenie masy m_3?



4.4 pranie(8)

W pralce pierze się jedna skarpetka. Podczas powolnego obracania bębna skarpetka odrywa się od jego wewnętrznej powierzchni i z plaskiem spada, jak na rysunku obok. Jaka musi być prędkość obracania się bębna ω, żeby punkt oderwania i uderzenia były po przeciwnych stronach koła? Przyjmij, że tarcie skarpetki o bęben jest wystarczająco duże, żeby się nie ślizgała wewnątrz bębna.



4.5 grad i mżawka(4)

Kropla z chmury spada na głowę fizyka. Z jaką prędkością?

Na kulkę poruszającą się (z prędkością mniejszą niż prędkość dźwięku) w gazie lub innym płynie, działa siła oporu zależna od prędkości v i średnicy kulki D:

$$F_{drag}(v) = \beta D v + \gamma D^2 v^2,$$

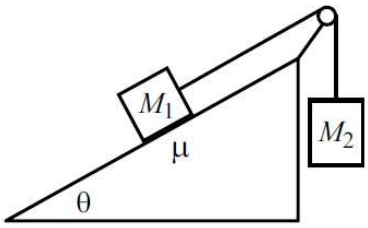
skierowana przeciwnie do kierunku ruchu. Pierwszy składnik ma związek z lepkością płynu, drugi z faktem, że poruszająca się kulka nadaje przyspieszenie pewnej masie płynu. W powietrzu w normalnych warunkach

$$\beta = 0.00016\,\mathrm{N \cdot s/m^2}, \qquad \gamma = 0.25\,\mathrm{N \cdot s^2/m^4}.$$

Wylicz maksymalną prędkość spadających kropel wody o średnicy $D = 2$ cm oraz o średnicy $D = 0.02$ cm.

4.6 klocek na równi(6)

Dwie masy są połączone sznurkiem i umieszczone jak na rysunku poniżej. Równia pochyła jest nieruchoma, masę sznurka i bloczka można zaniedbać, całość znajduje się w polu grawitacyjnym o przyspieszeniu g skierowanym w dół. Współczynnik tarcia masy M_1 o równię wynosi μ.
a) Narysuj siły działające na każdą z mas.
b) Czy siły te się równoważą?
c) Oblicz przyspieszenie każdej z mas. Rozważ wszystkie przypadki.

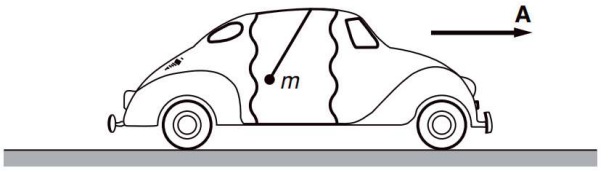


4.7 zależność eksponencjalna(4)

Ciało o masie m porusza się wzdłuż prostej, jego początkowa prędkość wynosi v_0. Podczas tego ruchu działa siła hamująca proporcjonalna do prędkości $F = -bv$ (b jest stałą). Znajdź zależność prędkości ciała od czasu. Narysuj tą zależność. Jaką drogę przebędzie ciało? Jak długo to będzie trwało?

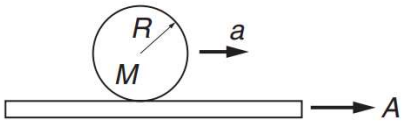
4.8 wunder-baum(2)

Ciężarek o masie m wisi na sznurku w samochodzie, który porusza się z przyspieszeniem A. Jaki kąt tworzy sznurek do pionu i jakie jest napięcie sznurka? Rozwiąż ten problem dwukrotnie: w inercjalnym układzie oraz w układzie przyspieszającego samochodu.



4.9 układ nieinercjalny(3)

Walec o masie M i promieniu R toczy się bez poślizgu na desce, która porusza się z przyspieszeniem A. Znajdź przyspieszenie walca.



4.10 kropla w chmurze **(10)

(Premiuję rozwiązania dostarczone na kartce na początku ćwiczeń. Tego zadania nie będziemy rozwiązywać na zajęciach.)

W chmurze tworzy się i spada kropla deszczu. Spadając zagarnia sobą parę wodną i rośnie. Jak prędkość kropli zmienia się w czasie? Załóż, że kropla jest kulista, że nie ma oporów ruchu kropli w powietrzu (w przeciwieństwie do poprzednich zadań), oraz nie zachodzą zderzenia między różnymi kroplami.

Wskazówki: Zapisz równania wiążące promień kropli $r(t)$, jej masę $m(t)$, prędkość $v(t)$, gęstość wody ρ, gęstość pary α. Równanie różniczkowe

$$\ddot{r} + A\frac{\dot{r}^2}{r} = B.$$

ma bardzo proste rozwiązanie typu $r(t) = Ct^2$.

5 Energia kinetyczna i potencjalna

Kula u nogi – Ziemia. Hugo Steinhaus, Słownik racjonalny.

5.1 piątek, 13-tego(2)

W roku 2029, 13 kwietnia, asteroida 99942 Apophis przeleci 38000 km od Ziemi (ok. 10 razy bliżej niż Księżyc). Asteroida ta ma średnicę około 325 m i gęstość około 2600 kg/m^3, będzie poruszać się wtedy z prędkością 12.6 km/s. Jaka będzie jej energia kinetyczna w porównaniu do bomby termojądrowej Castle/Bravo (15 megaton TNT). 1 megatona TNT to 4.18×10^{15} J.

5.2 prędkość ucieczki(2)

Jak mała musi być planeta, żeby człowiek mógł z niej wyskoczyć? Przyjmij, że gęstość planety równa jest średniej gęstości Ziemi, oraz że na Ziemi można podskoczyć o 1 metr. Przyjmij, że niezależnie od grawitacji, można w skok włożyć tyle samo energii.

5.3 energia na orbicie kołowej(3)

a) Uzasadnij zdanie z wikipedia.org: *The escape velocity at a given height is* $\sqrt{2}$ *times the speed in a circular orbit at the same height.*
b) Jaki jest związek pomiędzy energią kinetyczną i potencjalną dla satelity na orbicie kołowej?

5.4 winda w kosmos(2)

Ile energii wymaga podniesienie 1 tony z powierzchni Ziemi na wysokość równą promieniowi Ziemi? Ile ta energia kosztuje? Cena prądu to 2 zł/kWh. Do dyskusji: Czy winda w kosmos jest realistyczna?

5.5 pocisk między planetami(4)

Dwie planety, każda o masie M i promieniu R, są nieruchome względem siebie, a ich środki są oddalone o $4R$. Potrzebujesz wystrzelić pocisk z powierzchni jednej planety na drugą, najkrótszą drogą między nimi. Jaką minimalną prędkość początkową trzeba nadać pociskowi, żeby doleciał do drugiej planety?

5.6 energia w drganiach harmonicznych(4)

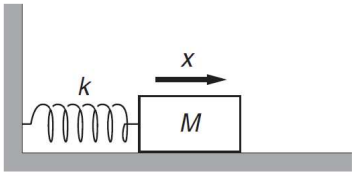
Masa m drga na sprężynie o stałej k, w zgodzie z równaniem ruchu

$$m\ddot{x} = -kx.$$

Zmienna x oznacza wychylenie masy z położenia równowagi. Rozwiązanie równania ruchu ma postać

$$x = A\sin(\omega_0 t + \phi_0), \qquad \text{gdzie} \qquad \omega_0 = \sqrt{k/m},$$

a stałe A oraz ϕ_0 można dopasować do warunków początkowych – tutaj niesprecyzowanych. Zapisz energię potencjalną, energie kinetyczną i narysuj ich zależność od t, oraz ich zależność od x. Sprawdź czy całkowita energia jest zachowana. Dla jakiego x energia kinetyczna jest równa potencjalnej?



5.7 bungeeee(7)

Oglądnij film: *When Is A Bungee Jumper's Acceleration Max?* i odpowiedz na tytułowe pytanie. `https://www.youtube.com/watch?v=FhmLBxyX8Dw`

Policz to maksymalne przyspieszenie. Czy zależy to od długości liny l? Masy skoczka m? Modułu Younga E i przekroju liny S? Policz maksymalne rozciągnięcie liny podczas skoku. Jak trzeba dobrać te parametry, żeby maksymalne przyspieszenie było równe Ng? Ile razy maksymalne rozciągnięcie liny jest większe od statycznego dla ustalonego N?

5.8 minimum energii potencjalnej jako warunek równowagi(2)

W polu grawitacyjnym o przyspieszeniu g na nieważkiej sprężynie o współczynniku sprężystości k wisi nieruchomo ciało o masie m. Dla jakiego wydłużenia sprężyny energia potencjalna układu sprężyna+masa jest najmniejsza?

5.9 fale grawitacyjne(6)

Dwie identyczne kuliste masy krążą wokół środka masy po kołowej orbicie, trzymane na niej jedynie siłą grawitacji. Od jakich parametrów zależy okres obrotu? Jaki jest najkrótszy okres dla mas o parametrach naszego Słońca?

W 2015 roku detektor LIGO zarejestrował po raz pierwszy fale grawitacyjne, będące wynikiem zderzenia krążących wokół siebie dwu obiektów. Każdy miał masę rzędu 30 mas Słońca. Pokazane obok oscylacje wywołane zostały krążeniem tych obiektów i pozwalają bezpośrednio odczytać zmniejszający się okres obrotu. Jaki jest najkrótszy okres na tym wykresie? Oszacuj na podstawie tego okresu ruchu promień tych obiektów w momencie ich połączenia. Oszacuj gęstość tych obiektów.

Rysunek z pracy B.Abbott *et al.* (LIGO Scientific Collaboration and Virgo Collaboration), Phys. Rev. Lett. 116, 061102 (2016). Więcej szczegółów dla zainteresowanych: np. `http://physics.aps.org/articles/v9/17`

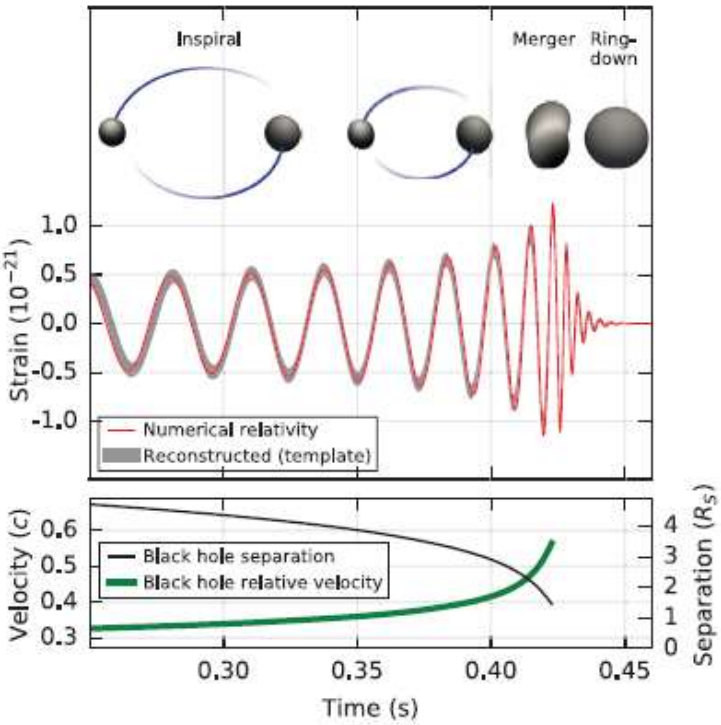


FIG. 2. *Top:* Estimated gravitational-wave strain amplitude from GW150914 projected onto H1. This shows the full bandwidth of the waveforms, without the filtering used for Fig. 1. The inset images show numerical relativity models of the black hole horizons as the black holes coalesce. *Bottom:* The Keplerian effective black hole separation in units of Schwarzschild radii ($R_S = 2GM/c^2$) and the effective relative velocity given by the post-Newtonian parameter $v/c = (GM\pi f/c^3)^{1/3}$, where f is the gravitational-wave frequency calculated with numerical relativity and M is the total mass (value from Table I).

6 Zachowanie pędu i energii

6.1 zderzenia centralne$^{(a=3,b=2,c=3)}$

Ruch dwu ciał o masach m_1 i m_2 odbywa się wzdłuż jednej prostej. Początkowo ciała mają prędkości v_1 i v_2, co prowadzi do zderzenia. Oblicz prędkości obu ciał po zderzeniu, w przypadku

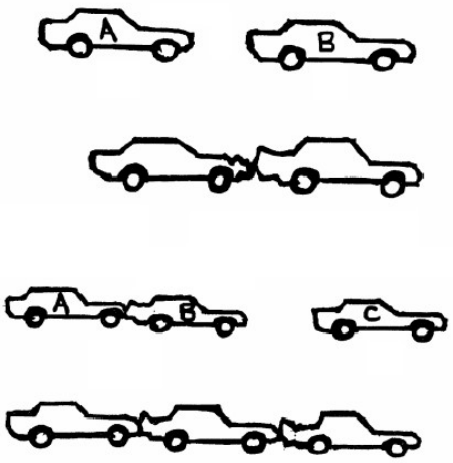
a) idealnie sprężystego zderzenia,

b) idealnie niesprężystego zderzenia. Jaka energia jest tracona?

c) Powtórz ostatni rachunek w układzie środka masy.

6.2 karambol$^{(a+b=4)}$

a) Samochód A uderza z energią kinetyczną E_A w identyczny, stojący samochód B. Jaką energię pochłania zderzenie? b) Samochody A i B uderzają razem w kolejny identyczny stojący samochód C. Jaką energię pochłania to zderzenie? Wszystkie zderzenia są całkowicie niesprężyste.

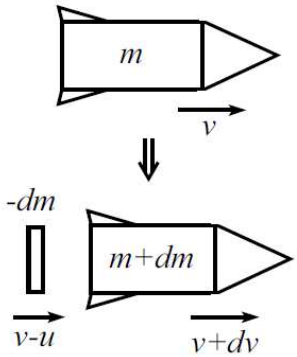


6.3 zderzenie sprężyste$^{(3)}$

Cząstka o masie m z prędkością v zderza się bez strat energii z nieruchomą cząstką o masie M. W wyniku zderzenia obie cząski poruszają się wzdłuż tej samej prostej, a ich prędkości wynoszą u i w (odpowiednio dla cząstek m i M). Wylicz stosunek prędkości u/w jako funkcję m/M.

6.4 ruch rakiety (w próżni i bez grawitacji)$^{(5)}$

Rakieta przyspiesza wyrzucając do tyłu produkty spalania paliwa rakietowego z prędkością u. Całkowita masa startowa rakiety wynosi M, z tego m_p jest masą paliwa. Prędkość początkowa wynosi zero. Do jakiej maksymalnej prędkości może rozpędzić się ta rakieta? Oszacuj tą prędkość dla typowych wartości $m_p/M = 0.8$ oraz $u = 3000$ m/s.

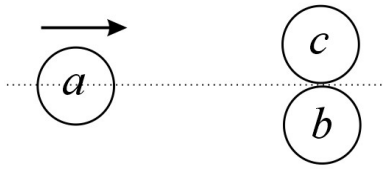


6.5 bilard dla początkujących$^{(2)}$

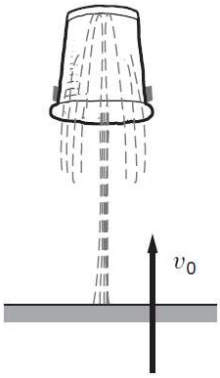
Poruszająca się cząstka uderza w nieruchomą, taką sama cząstkę. Pokaż, że po elastycznym zderzeniu wektory prędkości cząstek są do siebie prostopadłe.

6.6 bilard dla zaawansowanych$^{(6)}$

Bila z prędkością v_{a0} porusza się jak na rysunku, ale minimalna niedokładność powoduje, że najpierw uderza w bilę b, a zaraz potem w bilę c. W których kierunkach polecą bile? Zaniedbaj toczenie się bil i tarcie podczas zderzenia. Czy wynik byłby inny gdyby najpierw uderzona była bila c?



6.7 kosz na śmieci(4)



Odwrócony kosz o masie M wisi w powietrzu trzymany przez strumień wody, jak na rysunku. Woda wytryska z prędkością v_0, w ilości $\Delta m/\Delta t = K$. Na jaką wysokość kosz może być uniesiony w górę? Zaniedbaj wpływ wody która już spada w dół. Zderzenie wody z wiadrem jest niesprężyste. Czy można w ten sposób używając prysznica unieść kubek po kawie?

6.8 opór ruchu kuli w gazie *(8)

Kula o masie M i promieniu R porusza się z prędkością V przez ośrodek zawierający cząstki o masie m. W jednostce objętości jest n takich nieruchomych cząstek. Załóż, że $m \ll M$ oraz że cząstki nie oddziaływują między sobą, tylko są sprężyście odbijane przez kulę. Jaka jest siła hamująca ruch kuli?

6.9 piłeczka(4)

Piłeczka wyrzucona z prędkością $v = 5$ m/s, prawie pionowo, w każdym odbiciu od podłogi traci $f = 0.2$ swojej energii kinetycznej. Jak długo piłeczka będzie podskakiwać? Zaniedbaj opór powietrza.

6.10 odbicie od ściany(2)

Piłeczka odbija się sprężyście od ściany. Jaka jest prędkość piłeczki po odbiciu, jeżeli zaniedbamy siły tarcia? Czy zachowany jest pęd w tym zderzeniu?

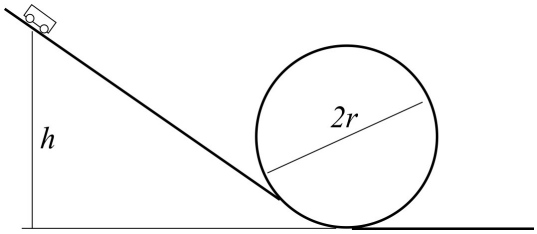
6.11 rollercoaster(a+b=4,c=1)

Kolejka w wesołym miasteczku ma kształt jak na rysunku. Wagonik startuje z wysokości h, zjeżdża w dół nabierając prędkości, jeden raz zatacza pętlę o promieniu r, po czym wyjeżdża poziomo.

a) Z jakiej wysokości h musi wystartować wagonik, żeby nie spadł na szczycie pętli? Zaniedbaj opory ruchu.

b) Policz jakie przyspieszenie działa na wagonik na dole pętli w takim przypadku.

c) Jak zaprojektować pętlę, żeby to przyspieszenie było mniejsze niż $5g$?



6.12 syzyfowa praca(4)

Syzyf toczy pod górę kwadratowy głaz. Jaką pracę musi wykonać, jeżeli góra ma wysokość h i nachylenie 100%? (kąt równi $\alpha = \pi/4$).

A może mniej by się napracował gdyby wpychał ten kamień pod górkę, zamiast go toczyć?