Materiały nadprzewodzące i magnetyczne, ZMiN IV rok

Część pierwsza, październik 2018. Michał Rams

1. Efekt Meissnera z równania Londonów

W fazie nadprzewodzącej spełnione jest równanie Londonów

$$\nabla \times \vec{J} = -\frac{1}{\mu_0 \lambda_L^2} \vec{B}$$

gdzie J jest gęstością prądu, a λ_L – głębokością wnikania. Łącząc to z równaniem Maxwella

$$\nabla \times \vec{B} = \ldots$$

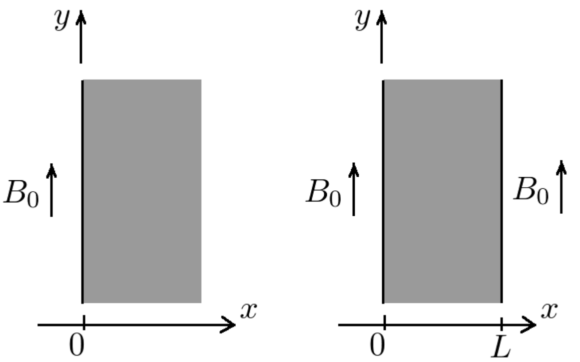
pokaż, że

$$\nabla^2 \vec{B} = \frac{1}{\lambda_L^2} \vec{B}. \tag{1}$$

Znajdź rozwiązanie tego równania dla jednorodnego nadprzewodnika wypełniającego całą przestrzeń tzn. spełniające $\vec{B} = const$ i uzasadnij w ten sposób efekt Meissnera.

2. Wnikanie pola w nadprzewodnik

a) Pokaż, że na granicy ośrodków powietrze-nadprzewodnik pole magnetyczne styczne do powierzchni wnika do nadprzewodnika na głębokość rzędu λ_L. Można to zrobić, podając rozwiązanie $B_x, B_y, B_z(x, y, z)$ równania (1) spełniające np warunek brzegowy jak na lewym rysunku poniżej. Jaka jest gęstość prądu?



Przykładowe głębokości wnikania dla kilku pierwiastków: Sn 34 nm, Cd 110 nm, Nb 39 nm.

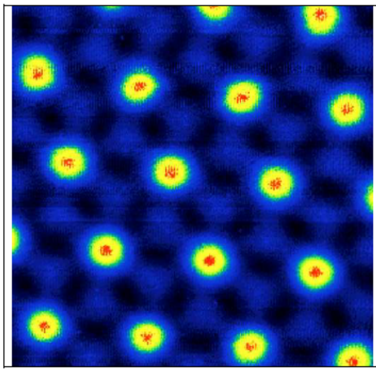
b) Jakie będzie rozwiązanie dla płyty o grubości L z nadprzewodnika, która jest w polu B_0 równoległym do powierzchni?

c) Pytania do dyskusji podczas ćwiczeń: Narysuj schematycznie jakie będzie $\vec{B}$ i $\vec{J}$ dla walcowej dziury w przestrzeni z nadprzewodnika, gdzie w tej dziurze jest pole $\vec{B}$ wzdłuż jej osi (można zwinąć powierzchnię z punktu a) w rurkę).

d) Narysuj schematycznie $\vec{B}$ i $\vec{J}$ dla prostego drutu z nadprzewodnika, w którym płynie prąd. Czy ten prąd jest jednorodny w przekroju drutu? Można zwinąć powierzchnię a punktu a) w rurkę w drugą stronę niż w punkcie c), tak żeby pole było wokół drutu, a prąd płynął wzdłuż drutu. Czy całkowity prąd płynący w przekroju drutu daje pole na zewnątrz zgodne z prawem Ampera?

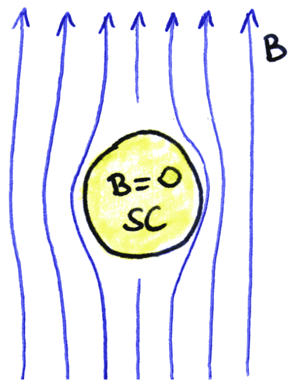
3. Sieć worteksów

Obrazek poniżej pochodzący ze strony www.unisoku.com/products/SPMSampleImage.html przedstawia *STM Topographic Image of vortex lattice of a superconductor NbSe*$_2$. Proszę oszacować w jakim polu magnetycznym był zrobiony ten pomiar.



Temperature: 400mK, Environment: UHV
Field of View: 250nm x 250nm
Dr.Hanaguri in Magnetic Materials Laboratory, RIKEN

4. Pole magnetyczne wokół kuli z nadprzewodnika



W jednorodne pole magnetyczne $\vec{B} = B_0\hat{z}$ wsadzono kulę o promieniu R zrobioną z nadprzewodnika (SC – *superconductor* na rysunku poniżej). Wewnątrz nadprzewodnika jest pole $B = 0$, co modyfikuje również rozkład pola wokół tej kuli. Jakie pole B będzie np. na równiku kuli w punkcie A?

Wskazówki Można to policzyć z równań Maxwella i warunków ciągłości odpowiednich składowych pola $\vec{B}$ na granicy ośrodków. Pola są statyczne, więc wszystkie $\partial/\partial t = 0$ w równaniach Maxwella znikają. Poza kulą nie płyną żadne prądy, więc spełnione jest tam równanie rot$\vec{B} = 0$. Można tam wprowadzić potencjał skalarny W taki, że grad$W = \vec{B}$. Ponieważ zawsze div$\vec{B} = 0$ to

$$0 = \mathrm{div}\vec{B} = \mathrm{div}(\mathrm{grad}W) = \nabla^2 W$$

czyli potencjał W spełnia znane (skąd?) równanie Laplace'a. Równanie Laplace'a we współrzędnych sferycznych, dla układu o osiowej symetrii ma rozwiązanie ogólne postaci

$$W(r,\theta) = \sum_{n=0}^{\infty}\left(C_n r^n + \frac{D_n}{r^{n+1}}\right)P_n(\cos\theta) \tag{2}$$

gdzie C_n i D_n są dowolnymi współczynnikami, a $P_n(\mu)$ są wielomianami Legendre'a

$$P_0(\mu) = 1, \quad P_1(\mu) = \mu, \quad P_2(\mu) = (3\mu^2 - 1)/2, \quad P_3(\mu) = (5\mu^3 - 3\mu)/3, \quad \ldots$$

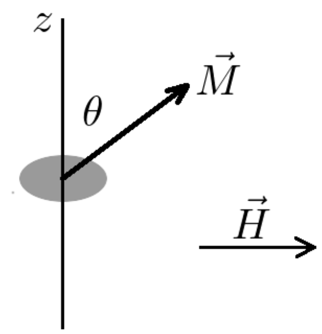
Kolejne kroki rozwiązania to:

- Znajdź gdzieś wzór na postać operatora grad we współrzędnych sferycznych. Korzystając z tego oraz z (2) wylicz składowe B_r i B_θ.
- Zapisz warunki graniczne które musi spełniać $\vec{B}$ dla $r = R$ oraz dla $r \to \infty$.
- Wyciągnij wnioski, które ze współczynników C_n i D_n są równe zeru. Niezerowe powinny zostać tylko C_1 i D_1. Zapisz końcowy wzór na W oraz na B_r i B_θ w obszarze $r \geqslant R$.
- Pytanie o pole na równiku dotyczy szczególnego kąta $\theta = \pi/2$ i $r = R$.
- Jak narysować linie pola B, np w programie Mathematica?

5. Magnetyzacja ferromagnetyka

Nikiel jest ferromagnetykiem, w którym w temperaturze pokojowej wszystkie momenty magnetyczne są równoległe, i na jeden atom przypada moment magnetyczny $0.6\mu_B$. Jaka jest magnetyzacja w niklu (w układzie SI i w układzie cgs)?

6. Model Stonera–Wohlfartha



Rozważmy nieruchome ziarno ferromagnetyka mające moment magnetyczny $\vec{M}$. Wartość $|\vec{M}|$ jest stała, ale od kierunku $\vec{M}$ zależy tzw. energia anizotropii E_A. Dla ziarna o anizotropii osiowej można przybliżyć

$$\mathcal{E}_A = K\sin^2\theta$$

gdzie K jest współczynnikiem anizotropii, a θ jest kątem pomiędzy $\vec{M}$, a osią anizotropii z. Jak ustawia się $\vec{M}$?

Przyłożenie zewnętrznego pola magnetycznego $\vec{H}$ daje dodatkowy wkład do energii

$$\mathcal{E}_Z = -\mu_0\vec{H}\cdot\vec{M}$$

Globalne i lokalne minima całkowitej energii $\mathcal{E}_A + \mathcal{E}_Z$ wyznaczają stabilne wartości θ. Eksperymentalnie najłatwiej mierzy się składową momentu $\vec{M}$ na kierunek pola $\vec{H}$. Wyznacz zależność $M_x(H_x)$ dla szczególnego przypadku gdy pole $\vec{H}$ jest w kierunku osi x (prostopadłej do osi anizotropii z), a współczynnik $K < 0$.

Bardziej ogólne wyniki: `https://en.wikipedia.org/wiki/Stoner-Wohlfarth_model`

7. Przybliżenie pola molekularnego dla ferrimagnetyka

Rozważmy kryształ zbudowany z atomów A i B, atomy A mają za sąsiadów tylko atomy B i na odwrót. Każda podsieć osobno byłaby paramagnetykiem spełniającym prawo Curie: magnetyzacja

$$M_A = \frac{C_A}{T}H, \qquad M_B = \frac{C_B}{T}H.$$

jest proporcjonalna do natężenia pola H i zależy od temperatury T.

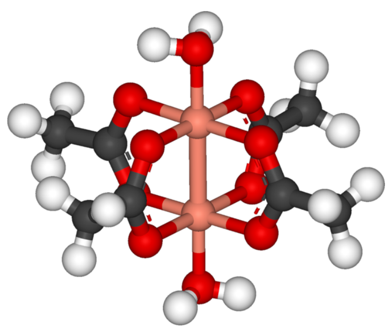
W krysztale podsieci oddziaływują między sobą, co można przybliżyć poprzez dodatkowe pole molekularne. Pole molekularne w miejscu atomów A jest równe $H_A = -\lambda M_B$, a w podsieci B wynosi $H_B = -\lambda M_A$. Pole H jest sumą zewnętrznego pola H^{ext} i pola molekularnego H_X.

Wylicz całkowitą podatność

$$\chi = (M_A + M_B)/H^{ext}$$

jako funkcję T, λ, C_A, C_B oraz znajdź temperaturę, w której pojawia się spontaniczne uporządkowanie.

8. Magnetyk molekularny: dimer 1/2-1/2



W cząsteczce octanu miedzi $Cu_2(CH_3COO)_4\cdot 2H_2O$ każdy z dwu jonów Cu ma spin $s_1 = s_2 = 1/2$. Między tymi spinami istnieje silne oddziaływanie wymienne (*exchange interaction*) opisane hamiltonianem $\mathcal{H}_{ex} = -2J_{ex}\vec{s}_1\vec{s}_2$, gdzie stała $J_{ex}/k_B \simeq -240$ K. Jaka będzie zależność podatności magnetycznej od temperatury? Wskazówki:

a) bez pola magnetycznego są dwa stany energetyczne cząsteczki, jeden o spinie całkowitym $S = 0$, drugi o spinie całkowitym równym $S = 1$. Pokaż, że energie tych poziomów wynoszą

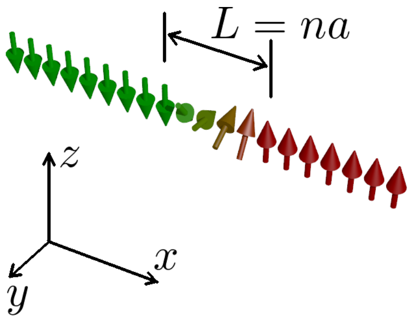
$$\mathcal{E}(S) = -J_{ex}\left[S(S+1) - s_1(s_1+1) - s_2(s_2+1)\right], \qquad \text{gdzie} \quad \vec{S} = \vec{s}_1 + \vec{s}_2$$

b) W polu magnetycznym B stan singletowy (tzn o zerowym spinie) się nie zmienia, a stan trypletowy (tzn. o spinie $S = 1$) rozszczepia się na trzy poziomy: $\mathcal{E}(S) - g\mu_B B$, $\mathcal{E}(S)$ oraz $\mathcal{E}(S) + g\mu_B B$.
c) Razem są więc 4 stany energetyczne, w których znajdować może się cząsteczka z prawdopodobieństwami określonymi rozkładem Boltzmanna. Można dla nich zapisać funkcje rozdziału

$$Z = \sum_{i=1}^{4} \exp(-\mathcal{E}_i/k_B T)$$

Warto przyjąć zero skali energii tak, żeby wzory były jak najprostsze. Rozszczepienie w niewielkim polu magnetycznym B jest małe w porównaniu z $k_B T$ oraz z J_{ex}.

9. Ścianka domenowa



Domena w ferromagnetyku do obszar w którym spiny mają tą samą orientację. Rozważmy materiał który ma łatwą oś anizotropii w kierunku z, możliwe są wtedy domeny zorientowane $+\hat{z}$ albo $-\hat{z}$. Obszar przejścia między dwoma różnymi domenami (patrz rysunek) nazywany jest ścianka domenową. Oszacuj energię takiej ścianki domenowej oraz jej szerokość.

Patrz: C. Kittel, *Introduction to solid state physics, chapter 15.*

Dodatkowe założenia upraszczające:

- spiny są klasyczne, wszystkie są w płaszczyźnie yz (tzw. ścianka Blocha),
- oddziaływanie wymienne $\mathcal{E}_{ex} = -2\mathcal{J}\vec{S}_1 \cdot \vec{S}_2$ pomiędzy dwoma sąsiednimi spinami może być przybliżone jako
$$\mathcal{E}_{ex}^i = const + \mathcal{J}S^2(\theta_i - \theta_{i+1})^2,$$
gdzie θ_i jest orientacją i-tego spinu,
- ścianka składa się z n spinów mających orientacje takie, że $(\theta_i - \theta_{i+1}) = \pi/n$ dla każdych dwu sąsiadów,
- energia anizotropii każdego spinu ma postać $\mathcal{E}_{an}^i = K\sin^2\theta_i$, gdzie $K > 0$,
- żeby znaleźć n trzeba zapisać całkowitą energię i znaleźć jej minimum ze względu na n,
- można stosować dość grube przybliżenia, zakładamy że n jest duże.

10. anizotropia jonów

Pewnien jon w krysztale ma Hamiltonian spinowy postaci $\mathcal{H}_{cf} = DS_z^2$, gdzie $D = 6$ K, $S = 1$ and $g = 2$. Naszkicuj magnetyzację jako funkcję pola dla pola przyłożonego wzdłuż osi z, dla 0 K oraz 4 K.

11. Obliczenia metodą elementów skończonych

Będziemy modelować metodą obliczeń polowych różne układy magnetyczne, przy pomocy programu FEMM. Program jest darmowy, niewielki, do ściągnięcia ze strony `http://www.femm.info` Na wykładzie będą wyjaśnione podstawy: rysowanie w FEMM 2D, biblioteka materiałów, podstawy obliczeń polowych.

Jako przygotowanie na ćwiczenia trzeba wykonać rachunki dla jednego z problemów. Na ćwiczeniach omówimy wyniki. Problemy do modelowania:

- Halbach array: proszę znaleźć co to jest! układ liniowy magnesów z dużym polem tylko z jednej strony.
- Halbach cylinder: proszę znaleźć co to jest! układ z np. 4 magnesów trwałych z prawie jednorodnym polem magnetycznym pomiędzy nimi.
- Ekranowanie magnetyczne: magnes trwały otoczony osłoną z a) miedzi, b) drugiego magnesu c) mumetalu. Co skuteczni ekranuje stałe pole magnetyczne? Lepsza jest osłona cylindryczna czy prostokątna? Czy da się ekranować siłę oddziaływania między dwoma magnesami?